376

B.A./B.Sc. FIRST SEMESTER EXAMINATION 2021

MATHEMATICS

DIFFERENTIAL CALCULUS AND INTEGRAL CALCULUS

Time : 3:00 Hours Max. Marks : 75

नोट :प्रश्नपत्र के तीन खण्ड 'अ' 'ब' और 'स' हैं। प्रत्येक खण्ड में दिये गये निर्देशों के अनुसार प्रश्नों का उत्तर दीजिए।

Note : The question paper has three sections 'A' 'B' & 'C'. Answer the questions as per the instructions given in the each section.

खण्ड 'अ'(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

Section 'A' (Very Short Answer Type Questions)

नोट : किन्हीं 07 प्रश्नों का उत्तर दीजिये। प्रत्येक प्रश्न के उत्तर की अधिकतम सीमा 50 शब्द हैं। 7X2=14

Note : Attempt any 07 questions. Answer of each question should not exceed 50 words.

1.1 State the Archemedean Property of the real numbers.
वास्वविक संख्याओं के लिए आर्किमिडीज के सिद्धान्त का उल्लेख कीजिए।

1.2 Define uniform continuity.
एक समान निरंतरता को परिभाषित कीजिए।

1.3 State the Euler's theorem on Homogeneous function.
सजातीय फलन के लिए ऑयलर के प्रमेय का कथन लिखिए।

1.4 Write the equation of tangent to the curve $y = f(x)$ at (x_1, y_1).
वक्र $y = f(x)$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण लिखिए।

1.5 Define upper and lower Riemann integrals for a bounded real valued function defined on [a , b].
[a , b] पर परिभाषित परिबद्ध वास्तविक मान फलन के लिए उच्च और निम्न Riemann समाकलन को परिभाषित कीजिए।

1.6 Discuss the convergence of the integral $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$.

P.T.O.

समाकल $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ के अभिसरण की विवेचना कीजिए।

1.7 Write the relation between Beta and Gamma function.
बीटा और गामा फलन के बीच सम्बन्ध को लिखिए।

1.8 Write the Dirichlet's test for the improper integrals.
असामान्य (अनुचित / improper) समाकलन के डिरिचलेट परीक्षण का कथन लिखिए।

1.9 What do you understand by the Rectification of a curve ?
किसी वक्र के सुधार से आप क्या समझते हैं ?

1.10 Define an irrotational vector.
एक अघूर्णी सदिश को परिभाषित कीजिए।

खण्ड 'ब'(लघु उत्तरीय प्रश्न)
Section 'B' (Short Answer Type Questions)

नोट : किन्हीं 05 प्रश्नों का उत्तर दीजिये। प्रत्येक प्रश्न के उत्तर की अधिकतम सीमा 200 शब्द हैं। 5X5=25

Note : Attempt any 05 questions. Answer of each question should not exceed 200 words.

1. Write the complete ordered field axioms for the set of real numbers.
वास्तविक संख्याओं के समुच्चय के लिए पूर्ण आदेशित क्षेत्र अभिगृहित को लिखिए।

2. Show that the function f (x) defined by

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

is continuous at x = 1.
दर्शाइये कि फलन

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

बिन्दु x = 1 पर एक सतत फलन है।

3. State Rolle's theorem. Examine the validity of the Rolle's theorem for the function $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$.

रोल्स प्रमेय का कथन लिखिए। फलन $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$ के लिए रोल्स प्रमेय के कथन की पुष्टि का परीक्षण कीजिए।

4. Verify Euler's theorem for $u = x^3 + y^3 + 3xyz$

फलन $u = x^3 + y^3 + 3xyz$ के लिए आयलर प्रमेय का परीक्षण कीजिए।

5. Find the curvature at the point $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ of the curve $x^3 + y^3 = 3axy$.

वक्र $x^3 + y^3 = 3axy$ की वक्रता बिन्दु $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ पर ज्ञात कीजिए।

6. Define norm of a partition P of [a , b] show that the function $f:[0,1] \to R$ given by

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ -1 & x \in Q^c \end{cases}$$

is not Riemann integrable.

[a , b] के विभाजन P के मानदंड को परिभाषित कीजिए। दर्शाइये कि फलन $f:[0,1] \to R$ जो कि

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ -1 & x \in Q^c \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है, वह रीमान समाकलन के योग्य नहीं है।

7. Discuss the convergence of $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ के अभिसरण की विवेचना कीजिए।

8. If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, then find the value of ∇r , where

$r = |\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, तो ∇r का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ पर

$r = |\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

खण्ड 'स'(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Section 'C' (Long Answer Type Questions)

नोट : किन्हीं 03 प्रश्नों का उत्तर दीजिये। प्रत्येक प्रश्न के उत्तर की अधिकतम सीमा 400 शब्द हैं। 3X12=36

Note : Attempt any 03 questions. Answer of each question should not exceed 400 words.

9. What do you understand by the convergence of a series. Applying Cauchy's n^{th} root test discuss the convergence of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n)^n \, x^n \, , \, x > 0$$

किसी श्रेणी के अभिसरण से आप क्या समझते हैं ? कोशी के n^{th} मूल परीक्षण से श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n)^n \, x^n \, , \, x > 0$ के अभिसरण की विवेचना कीजिए।

10. State Lagrange's mean value theorem show that the function $f(x) = x + 1/x \, , \, x \in [1/2 \, , \, 3]$ satisfy the condition of the mean value theorem and find the value of 'c'.

लैगरेंजी के मध्यमान प्रमेय का कथन दीजिए। दर्शाइये कि फलन $f(x) = x + 1/x \, , \, x \in [1/2 \, , \, 3]$ मध्यमान प्रमेय की शर्तों को पूरा करता है तथा 'c' के मान की गणना भी कीजिए।

11. Define asymptote of a given curve. Find the asymptote of the curve.

$$x^3 + y^3 - 3 a x y = 0$$

by shorter method.

किसी दिए हुए वक्र के स्पर्शोन्मुख को परिभाषित कीजिए। वक्र $x^3 + y^3 - 3 a x y = 0$ के स्पर्शोन्मुख, लघु विधि से ज्ञात कीजिए।

12. Prove that

$$\boxed{1/2} = \sqrt{\Pi}$$

सिद्ध कीजिए

$$\boxed{1/2} = \sqrt{\Pi}$$

13. Prove that the volume of the solid generated by the revolution of an ellipse around its minor axis is $\frac{4\pi}{3} a^2 b$.

अपने लघु अक्ष के चारों ओर दीर्घवृत्त के परिक्रमण से उत्पन्न ठोस का आयतन $\frac{4\pi}{3} a^2 b$ है, सिद्ध कीजिए।

14. State and prove Stoke's theorem for a plane.

किसी समतल के लिए स्टोक्स प्रमेय का कथन लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

****