

B.A./B.Sc. SECOND SEMESTER EXAMINATION 2022
MATHEMATICS

MATRICES AND DIFFERENTIAL EQUATIONS & GEOMETRY

Time : 3:00 Hours

Max. Marks : 75

नोट : प्रश्नपत्र के तीन खण्ड 'अ' 'ब' और 'स' हैं। प्रत्येक खण्ड में दिये गये निर्देशों के अनुसार प्रश्नों का उत्तर दीजिए।

Note : The question paper has three sections 'A' 'B' & 'C'. Answer the questions as per the instructions given in the each section.

खण्ड 'अ' (अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

Section 'A' (Very Short Answer Type Questions)

नोट : किन्हीं 07 प्रश्नों का उत्तर दीजिये। प्रत्येक प्रश्न के उत्तर की अधिकतम सीमा 50 शब्द हैं।

7X2=14

Note : Attempt any 07 questions. Answer of each question should not exceed 50 words.

1.1 Define Hermitian and skew – Hermitian matrix.

हरमिशियन एवं स्क्यू – हरमिशियन आव्यूह की परिभाषा दीजिये।

1.2 State Cayley – Hamilton theorem.

केली-हैमिल्टन प्रमेय का उल्लेख कीजिये।

1.3 Prove that

सिद्ध कीजिये

$$i^n = e^{-i(4n+1)\frac{\pi}{2}}$$

1.4 Prove that

सिद्ध कीजिए

$$\sin ix = i \sinh x$$

- 1.5 Define order and degree of differential equation by giving examples.

उदाहरण द्वारा अवकल समीकरण के आर्डर एवं डिग्री को परिभाषित कीजिए।

- 1.6 Solve the following differential equation :

निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिये :

$$p = \log (px - y)$$

where

$$y = cx - e^c$$

जहाँ

$$p = \frac{dy}{dx}$$

- 1.7 Write the equation of the plane in the normal form.

समतल का समीकरण अभिलम्ब रूप में लिखिए।

- 1.8 If two spheres intersect, what is the curve of intersection ?

यदि दो गोले प्रतिच्छेद करते हैं, प्रतिच्छेदन वक्र क्या है ?

Circle

- 1.9 Write equation of a right circular cone.

एक लम्ब वृत्तीय शंकु का समीकरण लिखिये।

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

- 1.10 Write the equation of the ellipsoid.

इलिप्साइड का समीकरण लिखिए।

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

खण्ड 'ब' (लघु उत्तरीय प्रश्न)

Section 'B' (Short Answer Type Questions)

नोट : किन्हीं 05 प्रश्नों का उत्तर दीजिये। प्रत्येक प्रश्न के उत्तर की अधिकतम सीमा 200 शब्द हैं।

5X5=25

P.T.O.

Note : Attempt any 05 questions. Answer of each question should not exceed 200 words.

1. Show that the following equations are consistent and solve them.
 दिखाइये कि निम्नलिखित समीकरण कंसिस्टेंट हैं और इसका हल प्राप्त कीजिए।

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 14$$

$$x + 4y + 7z = 30$$

2. If

यदि

$$u = \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$$

Prove that :

सिद्ध कीजिए :

$$\theta = -i \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + i \frac{u}{2} \right)$$

3. Solve :

हल कीजिए :

$$(y \sin 2x - y^2 + \cos^2 x) dx - (y^2 + \cos^2 x) dy = 0$$

$$y \sin 2x dx - (y^2 + \cos^2 x) dy = 0$$

4. Prove that :

सिद्ध कीजिए :

$$\frac{1}{D - \alpha} Q = e^{\alpha x} \int Q e^{-\alpha x} dx$$

5. Prove that confocals through any point in the plane of an ellipse intersect orthogonally.

सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त के तल के किसी बिन्दु से जाने वाले संनाभि शांकव लम्बवत् काटते हैं।

6. Prove that the straight lines whose direction cosines are given by the relations

$$a\ell + b m + c n = 0$$

$$f m n + g n \ell + h \ell m = 0$$

are perpendicular if

$$\frac{f}{a} + \frac{g}{b} + \frac{h}{c} = 0$$

and parallel if

$$\sqrt{af} \pm \sqrt{bg} \pm \sqrt{ch} = 0$$

सिद्ध कीजिये कि सीधी रेखाएँ जिनकी दिक्-कोज्याएँ निम्नलिखित सम्बन्ध द्वारा दी गयी हैं

$$a\ell + b m + c n = 0$$

$$f m n + g n \ell + h \ell m = 0$$

लम्बवत् हैं, यदि

$$\frac{f}{a} + \frac{g}{b} + \frac{h}{c} = 0$$

और समानान्तर हैं, यदि

$$\sqrt{af} \pm \sqrt{bg} \pm \sqrt{ch} = 0$$

7. Two spheres of radii r_1 and r_2 cut orthogonally. Prove that the radius of the common circle is

$$\frac{r_1 r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$$

r_1 और r_2 त्रिज्या वाले दो गोले एक दूसरे को लम्बवत् काटते हैं। सिद्ध कीजिए कि उभयनिष्ठ वृत्त की त्रिज्या

$$\frac{r_1 r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \quad \text{है}$$

8. Find the equation to the plane which cuts the surface $2x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 4$ in a conic whose centre is the point $(1, 2, 3)$.
उस तल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सतह $2x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 4$ को एक शांकव में काटता है, जिसका केन्द्र बिन्दु $(1, 2, 3)$ है।

खण्ड 'स' (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Section 'C' (Long Answer Type Questions)

नोट : किन्हीं 03 प्रश्नों का उत्तर दीजिये। प्रत्येक प्रश्न के उत्तर की अधिकतम सीमा 400 शब्द हैं।

3X12=36

Note : Attempt any 03 questions. Answer of each question should not exceed 400 words.

9. Find the eigen values and eigen vectors of the matrix
आव्यूह के आइगेन मानों तथा आइगेन सदिशों को ज्ञात कीजिए।

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

10. Solve the following differential equations :

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिये :

(a) $(D^2 - 4D + 4)y = x^2 + e^x + \cos 2x$

(b) $(D^2 - 2D + 1)y = x e^x \sin x$

11. Solve :

हल कीजिए :

$$(x^2 D^2 + 3x D + 1)y = \frac{1}{(1-x)^2}$$

12. Prove that :

सिद्ध कीजिये :

(a) $\tan \left(i \log \frac{a-ib}{a+ib} \right) = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$

(b) $\log \tan \left(\frac{\pi}{4} + i \frac{x}{2} \right) = i \tan^{-1} (\sinh x)$

13. A line with direction cosines proportional to 2, 7, -5 is drawn intersect the lines

एक रेखा जिसकी दिक् - कोज्याएँ 2, 7, -5 के समानुपातिक हैं, निम्न रेखाओं को प्रतिच्छेद करती हैं

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z+2}{1} = \lambda_1$$

and और

$$\frac{x+3}{-3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-6}{4} = \lambda_2$$

Find the coordinates of the point of intersection and the length intercepted on it.

प्रतिच्छेद बिंदु का निर्देशांक और अंतः खण्डित लम्बाई ज्ञात कीजिए।

14. Show that the equation

$$\sqrt{fx} + \sqrt{gy} + \sqrt{hz} = 0$$

represents a cone which touches the coordinate planes. Find the equation to its reciprocal cone.

दिखाइये कि समीकरण

$$\sqrt{fx} + \sqrt{gy} + \sqrt{hz} = 0$$

जो निर्देशांक तलों को स्पर्श करता है, एक शंकु चित्रित करता है। इसके व्युत्क्रम शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए।
